重調和作用素に対する球内部境界値問題 (偏微分方程式と時間周波数解析)

亀高, 惟倫

数理解析研究所講究録 1385 巻 2004 年 56-64

重調和作用素に対する球内部境界値問題

亀高 惟倫 (Yoshinori KAMETAKA)

大阪大学大学院基礎工学研究科

1 問題と準備

重調和作用素に対する球内部境界値問題

BVP(ε)

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x) & (|x| < R) \\ u(R\xi) = u_{0,0}(\xi) & (|\xi| = R) \\ ((1-\varepsilon)D + \varepsilon D^2)\, u(x)\Big|_{x=R\xi} = u_{0,1}(\xi) & (|\xi| = R) \end{cases}$$

を考える.

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2q+2}), \quad \Delta = \sum_{j=1}^{2q+2} \partial_{x_j}^2, \quad D = \sum_{j=1}^{2q+2} x_j \partial_{x_j}$$

である. 空間2次元の場合 ($q=0$) は別稿の竹居氏の報告と [2] で詳しく述べている. ここでは $2q+2 = 3, 4, 5, \ldots$ とする. 以下 $-\infty \leq \varepsilon < -1$ または $0 \leq \varepsilon < \infty$ とする. この問題は自己共役である.

BVP(ε) は任意の滑らかなデータ $\{f(x); u_{0,0}(\xi), u_{0,1}(\xi)\}$ に対して唯一の古典解 $u(x)$ をもち、次のように表される.

$$u(x) = \int_{|y|<R} G(\varepsilon; x, y)\, f(y)\, dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{|\eta|=1} P_j(\varepsilon; x, R\eta)\, u_{0,j}(\eta)\, dS(\eta)$$

$dS(\eta)$ は $2q+2$ 次元ユークリッド空間の標準的なルベック測度 dy より標準的に誘導された単位球面 $|\eta| = 1$ 上の面積要素である. グリーン関数 G とポアッソン関数 P_j の正値性、パラメータに関する単調性と境界挙動を調べた. 紙面の都合でポアッソン関数に触れることはできない. このグリーン関数を重調和グリーン関数と呼ぶ.

ゲーゲンバウアー多項式 $C_n^q(\lambda)$ の母関数

$$(1-2\rho\lambda+\rho^2)^{-q}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n C_n^q(\lambda)$$

から誘導される関数

$$Q(\rho,\lambda)=\frac{1}{\omega}(1-\rho^2)(1-2\rho\lambda+\rho^2)^{-q-1}=\frac{1}{q\omega}(\rho\partial_\rho+q)(1-2\rho\lambda+\rho^2)^{-q}$$

$$(0\le\rho<1,\ -1\le\lambda\le 1)$$

とその積分平均

$$Q(\delta;r,\lambda)=\int_0^1 Q(r\rho,\lambda)\rho^{\delta-1}d\rho\quad(\delta>0)$$

が以下で重要な役割を果たす．

$$\omega=2\pi^{q+1}/\Gamma(q+1)$$

は $2q+1$ 次元単位球面の表面積である．簡単にわかる

$$(D+\delta)\,Q(\delta;r,\lambda)=Q(r,\lambda)$$

も重要である．

別稿で扱った空間２次元の場合には極座標を導入し、フーリエ級数展開を利用したが、ここでは空間３次元以上で、球面調和関数による一般化されたフーリエ級数展開を利用する．

$$x=(x_1,\ldots,x_{2q+2})=r\xi,\ r=|x|,\ |\xi|=1$$

と極座標を導入する．

$$D=r\,\partial_r=\sum_{j=1}^{2q+2}x_j\,\partial_{x_j},\ \Delta=r^{-2}\,(D(D+2q)+\Lambda)$$

となる．Λ はラプラス・ベルトラミ作用素である．

球面調和関数 $S_{n,j}$ は $2q+1$ 次元単位球面上で定義された滑らかな関数であって、Λ の固有関数である．

$$-\Lambda\,S_{n,j}(\xi)=n(n+2q)\,S_{n,j}(\xi)$$

$$(n=0,1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,N(n))$$

が成り立つ．固有値 $n(n+2q)$ は縮退していて、多重度は

$$N(n) = \begin{cases} \dfrac{2n+2q}{n+2q}\dbinom{n+2q}{2q} & (n=1,2,3\ldots) \\ 1 & (n=0) \end{cases}$$

である．3次元の場合は $N(n)=2n+1$ である．$2q+1$ 次元単位球面には標準的な内積が定義されていて、上の球面調和関数は完備正規直交系をなしている．先程導入された重要関数 $Q(\rho,\lambda)$ は λ に内積 $\xi\cdot\eta$ を代入した形で使われる．

$$Q(\rho,\xi\cdot\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi)S_{nj}(\eta) = \frac{1}{\omega}(1-\rho^2)(1-2\rho\,\xi\cdot\eta+\rho^2)^{-q-1} > 0$$

$$(0\le\rho<1, \quad |\xi|=|\eta|=1)$$

が成り立つ．単位球面上で全質量1である．

$$0\le\rho<1, \quad 0<\delta<\infty \qquad \text{に対して}$$

$$\int_{|\eta|=1} Q(\rho,\xi\cdot\eta)dS(\eta) = 1$$

$$\int_{|\eta|=1} Q(\delta;\rho,\xi\cdot\eta)dS(\eta) = \delta^{-1}$$

が成り立つ．

記述を簡単にするため $x=r\xi$, $y=s\eta$ または $r=|x|$, $s=|y|$ の関数

$$\Phi = \Phi(x,y) = |x-y|^2 = r^2 - 2\,r\,s\,\xi\cdot\eta + s^2$$

$$\Psi = \Psi(x,y) = R^{-2}(R^2-|x|^2)(R^2-|y|^2) = R^{-2}(R^2-r^2)(R^2-s^2)$$

$$\rho_0 = \rho_0(r,s) = R^{-2}\,r\,s$$

$$\rho_1 = \rho_1(r,s) = (r\vee s)^{-1}(r\wedge s)$$

$$r\vee s = \max(r,s), \; r\wedge s = \min(r,s)$$

を使う．

$$0 \le \rho_0 \le \rho_1 \le 1 \qquad (0\le r,s\le R)$$

に注意しておこう．また次の関係も重要である．

$$\rho_1 + \rho_1^{-1} - 2\xi\cdot\eta = (rs)^{-1}\,\Phi$$

$$\rho_0 + \rho_0^{-1} - (\rho_1 + \rho_1^{-1}) = (rs)^{-1}\,\Psi$$

$$\rho_0 + \rho_0^{-1} - 2\xi\cdot\eta = (rs)^{-1}\,(\Phi + \Psi)$$

$$D\rho_0 = \rho_0, \quad D\,\rho_1 = -\,\mathrm{sgn}(r - s)\,\rho_1,$$

ここで $\mathrm{sgn}(r) = 1\ (r \geq 0), \quad -1\ (r < 0)$ である。

$$\rho_1 + \rho_1^{-1} = r^{-1}s + rs^{-1}$$

$$D\,(\rho_1 + \rho_1^{-1}) = (rs)^{-1}\,(r^2 - s^2)$$

2　ポアッソン問題

前節で述べた問題に対する結論を記述するために、普通のポアッソン問題に対するグリーン関数とポアッソン関数が使われる．調和作用素に対する球内部境界値問題を考える．

BVPH(ε)

$$\begin{cases} -\,\Delta\,u = f(x) & (|x| < R) \\ (1 - \varepsilon + \varepsilon D)\,u(x)\Big|_{x=R\xi} = u_{0,0}(\xi) & (|\xi| = 1) \end{cases}$$

以下 $0 \leq \varepsilon < 1$ とする．この問題も自己共役である．前節の結論のためには $\varepsilon = 0$ の時、すなわち純粋なポアッソン問題の結論のみが使われるが、全体としての比較対照のため第3種境界条件も考える．BVPH(ε) は与えられた任意の滑らかなデータ $\{f(x); u_{0,0}(\xi)\}$ に対し唯一の古典解 $u(x)$ を持ち、以下のように表すことができる．

$$u(x) = \int_{|y|<R} H(\varepsilon; x, y)\,f(y)\,dy + \int_{|\eta|=1} P(\varepsilon; x, R\eta)\,u_{0,0}(\eta)\,dS(\eta)$$

グリーン関数 H とポアッソン関数 P については次のことが知られている．証明は省略する．このグリーン関数は調和グリーン関数と呼ぶ．

定理 2.1

$\varepsilon = 0$ のとき次が成り立つ。

(1)

$$H(x,y) = H(0;x,y) = \frac{1}{2}(rs)^{-q}\int_{\rho_0}^{\rho_1} Q(\rho,\xi\cdot\eta)\rho^{q-1}d\rho \qquad (|x|,|y|<R)$$

(2)

$$H(0;x,y) = \frac{1}{2\omega}\int_{\Phi}^{\Phi+\Psi}\sigma^{-q-1}d\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{2q\omega}(\Phi^{-q}-(\Phi+\Psi)^{-q}) & (q\neq 0) \\ \dfrac{1}{2\omega}\log\dfrac{\Phi+\Psi}{\Phi} & (q=0) \end{cases}$$

$(|x|,|y|<R)$

(3)

$$P(x,y) = P(0;x,y) = Q(R^{-1}r,\xi\cdot\eta)$$

$(x = r\xi,\quad r<R,\quad |\xi|=1,\quad y=R\eta,\quad |\eta|=1)$

定理 2.2

$0<\varepsilon<1$ のとき次が成り立つ.

(1)

$$H(\varepsilon;x,y) - H(0;x,y) = R^{-2q}Q(\delta;\rho_0,\xi\cdot\eta) \qquad (|x|,|y|<R)$$

ここで$\delta = \varepsilon^{-1}-1$である.

(2)

$$P(\varepsilon;x,y) = (1+\delta)Q(\delta;R^{-1}r,\xi\cdot\eta)$$

定理 2.3

任意の有界関数 $f(y)$ に対し

$$u(x) = \int_{|y|<R} H(\varepsilon;x,y)f(y)dy \qquad (|x|<R)$$

は BVPH(ε) の境界条件を満たす．すなわち

$$(1-\varepsilon+\varepsilon D)u(x) \to 0 \qquad\qquad (r = |x| \to R)$$

が成り立つ．

この定理の証明が最も重要な部分であるが紙数の都合で省略する．

3 重調和グリーン関数の正値性、階層構造と境界挙動

結論を述べよう．

定理 3.1

$\varepsilon = 0$ のとき

(1)

$$G(0;x,y) = \frac{1}{8}(rs)^{1-q}\int_{\rho_0}^{\rho_1}(\rho+\rho^{-1}-(\rho_1+\rho_1^{-1}))Q(\rho,\xi\cdot\eta)\rho^{q-1}d\rho \qquad (|x|,\ |y|<R)$$

(2) ボッジオの公式

$$G(0;x,y) = \frac{1}{8\omega}\int_{\Phi}^{\Phi+\Psi}(\sigma-\Phi)\sigma^{-q-1}d\sigma \qquad (|x|,\ |y|<R)$$

$q=0$ のとき

$$G(0;x,y) = \frac{1}{16\pi}\left[\Psi-\Phi\log\left(\frac{\Phi+\Psi}{\Phi}\right)\right]$$

$q\neq 0,1$ のとき

$$G(0;x,y) = \frac{1}{8\omega}\left[\frac{1}{q+1}\left(\Phi^{-(q-1)}-(\Phi+\Psi)^{-(q-1)}\right)-\Phi\frac{1}{q}\left(\Phi^{-q}-(\Phi+\Psi)^{-q}\right)\right]$$

特に重要なのは、空間３次元の場合である．

$q=1/2$ のとき

$$G(0;x,y) = \frac{1}{16\pi}\left[(\Phi+\Psi)^{1/2}-\Phi^{1/2}-\Phi\left(\Phi^{-1/2}-(\Phi+\Psi)^{-1/2}\right)\right]$$

公式 (1) が我々が主張する重要な結論で、意味は別稿で述べたとおりである．重調和グリーン関数と調和グリーン関数の積分表示に重要共通項があり、それが最初に述べた本質的にはゲーゲンバウアー多項式の母関数 Q である．

一般の場合の結論を述べよう．

定理 3.2

$0<\varepsilon<\infty$ または $-\infty<\varepsilon<-1$ とすると

$$G(\varepsilon;x,y)-G(0;x,y)=\frac{1}{8}R^{-2q}\Psi Q(\delta;\rho_0,\xi\cdot\eta)\quad(|x|,\ |y|<R)$$

ここで $\delta=(\varepsilon^{-1}+1)/2$ である．

定理 3.3

$-\varepsilon_2<-\varepsilon_3<-1<0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$ とすると次の不等式が成り立つ．

$$0<G(0;x,y)<G(\varepsilon_0;x,y)<G(\varepsilon_1;x,y)<$$

$$G(+\infty;x,y)=G(-\infty;x,y)<G(-\varepsilon_2;x,y)<G(-\varepsilon_3;x,y)$$

$$(|x|,\ |y|<R)$$

この定理の証明は簡単である．ε が増加するとき δ は減少する．グリーン関数の境界条件に関する結論を述べよう．

定理 3.4

任意の有界関数 $f(y)$ に対し、関数

$$u(x)=\int_{|y|<R}G(0;x,y)f(y)dy$$

は BVP(0) の境界条件を満たす．すなわち、

$$u(x),Du(x)\ \to 0\quad(r\ =\ |x|\ \to\ R)$$

となる．

この定理は以下の事実より従う．

定理 3.5

(1)

$$\int_{|y|<R} G(0;x,y)f(y)dy = \frac{1}{32(q+1)(q+2)}(R^2-r^2)^2$$

(2)

$$D\,G(0;x,y) = G(0;x,y) - \frac{1}{4}(r^2-s^2)H(0;x,y) - \frac{1}{8}\Psi\,Q(\rho_0,\xi\cdot\eta)$$

(3)

$$\int_{|y|<R} |D\,G(0;x,y)|dy \leq \frac{7}{64}R^2(R^2-r^2)$$

一般の場合には境界条件に関連して次の結論を得る.

定理 3.6

$-\infty<\varepsilon<-1$ または $0<\varepsilon<\infty$ とする. 任意の有界関数 $f(y)$ に対し

$$u(x) = \int_{|y|<R} G(\varepsilon;x,y)f(y)dy \qquad (|x|<R)$$

は BVP(ε) の境界条件を満たす. すなわち

$$u(x),\ ((1-\varepsilon)D+\varepsilon D^2)u(x) \ \to 0 \qquad (r=|x| \ \to R)$$

となる.

この定理は次の定理より従う.

定理 3.7

$$\varepsilon^{-1}((1-\varepsilon)D+\varepsilon D^2)G(\varepsilon;x,y) = G_0(x,y)+G_1(\varepsilon;x,y)$$

$$G_0(x,y) = \frac{1}{8}R^{-2q}\left[|r^2-s^2|(\rho_0^{-1}\rho_1)^q Q(\rho_1,\xi\cdot\eta) - (R^2-s^2)Q(\rho_0,\xi\cdot\eta)\right]$$

$$G_1(\varepsilon;x,y) = \frac{1}{8}R^{-2q}\left[(\delta\,\Psi-(R^2-r^2))Q(\rho_0,\xi\cdot\eta)+(2-\delta)\delta\,\Psi\,Q(\delta;\rho_0,\xi\cdot\eta)\right]+$$

$$(2\delta-1-q)DG(0;x,y)+\left(\frac{q}{4}(r^2-s^2)-\frac{1}{2}r^2\right)H(x,y)$$

この定理により重調和グリーン関数の境界挙動が明らかとなる．境界条件が要求している重調和グリーン関数の2階偏導関数が、正体のわかったいくつかの関数によって記述されている．ボッジオの公式を微分することでこの結論を得ることはむつかしい．$G_1(x,y)$ は境界で0になることが目に見えている．そのためよくわかった関数 Q とその修正、$\varepsilon=0$ のときの重調和グリーン関数の1階偏導関数 $DG(0;x,y)$ および調和グリーン関数 $H(x,y)$ が使われている．$G_0(x,y)$ の処理は大変微妙である．重要関数 Q で表されている．$|\xi|=1$ なる ξ を1つえらんで固定する．$x=r\xi$ としてパラメータ r を $r\to R$ とする．$y=s\eta$ の関数として各点毎に $G_0(x,y)$ は0に収束する．$0<R_0\leq|y|\leq R$ における $G_0(x,y)$ の寄与は R_0 を十分 R に近くとると、いくらでも小さくなる．このような R_0 を固定し $|y|\leq R_0$ として、さらに $R_0<R_1<R$ なる R_1 をとり $R_1\leq|x|\leq R$ とする．このときパラメータ $r=|x|$ にかんして $G_0(x,y)$ は一様に有界となる．ルベックの有界収束定理を使って定理3.6の証明が完結する．

参考文献

[1] T. Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, Rend. Circ. Mat. Palermo 20 (1905), 97-135.

[2] Y. Kametaka, K. Takei, A. Nagai, *Green functions and Poisson functions for a biharmonic operator on a disk*, 投稿中